機械工学基礎・演習　後期　加藤担当分　試験（平成 22 年 1 月 18 日 2 限 203 号教室）

問題は 4 問．解答は解答用紙に記入して下さい．

1.　式(1)の S が，絶対値は図 1 の斜線部の面積と同じで，負の値を示すように，空欄に記入して完成した式を回答用紙に記入して下さい．

$$S = \int_{\boxed{}}^{\boxed{}} \boxed{} = -\int_{\boxed{}}^{\boxed{}} \boxed{} \qquad (1)$$

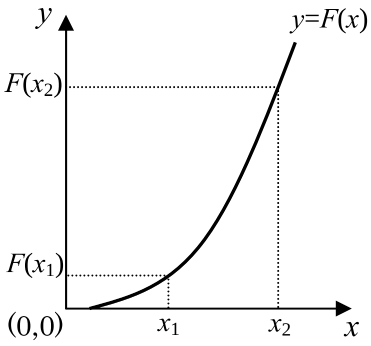


図 1　x の関数 y と積分

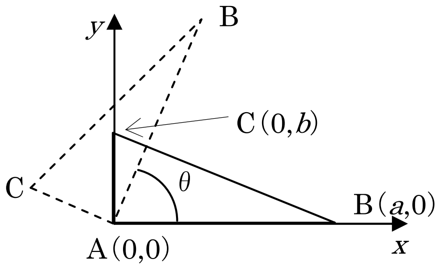


図 2　横たわる三角柱の断面

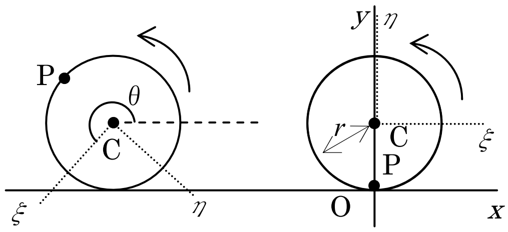


図３　x 軸上を転がる円柱の断面

2.　無風状態の平地で車両が走行する時に，車両が大気から受ける抗力 D が式(2)で与えられている．この抗力 D に打ち勝って車両が速度 U_∞で走行し続けるために必要な出力 P が速度の何乗に比例するか答えて下さい．問題用紙に説明のある記号については，解答中での説明を省いて構いません．

$$D = C_{\mathrm{D}} \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 S \qquad (2)$$

D: 抗力[N], C_{D}: 抗力係数，ρ：大気の密度[kg/m^3],

U_∞: 車両の走行速度[m/s], S: ~~車両の全面投影面積~~

車両の前面投影面積[m^2]

3.　一様な厚みと密度で断面が図 2 のような直角三角形をした三角柱が横たわっている．

(3-1)　図 2 の x-y 座標で実線で断面が描かれる三角柱の重心が$(x_G, y_G) = (a/3, b/3)$になることを，重心まわりのモーメントがつりあうという関係から式を作って計算し，証明して下さい．

(3-2)　三角柱を図 3 の破線ように傾けていくとき，角度 θ がいくつ以上だと点 C が水平面に向かって倒れるか求めて下さい．

4.　一様な厚みと密度の円柱が図 4 のように水平な x 軸上を速度 v_c で滑らずに 1 回転した．円柱の断面の円の半径を r，移動する中心の座標 C を(x_C, y_C)とする．円柱の移動速度 v_c は時間の関数であるとみなす．座標の原点 O と接触した円柱の表面上の点 P(x_P, y_P)の軌跡と x-y 座標から見た絶対速度を求める．

(4-1)　図 4 において，運動座標系 C-$\xi\eta$ の ξ 軸が x 軸となす角を θ とするとき，θ を円柱の中心の x 座標 x_C と半径 r を用いて表して下さい．

(4-2)　点 P の軌跡(x_P, y_P)を ξ 軸と x 軸のなす角 θ および半径 r を用いて表して下さい．

(4-3)　点 P の x-y 座標から見た絶対速度の成分$(\dot{x}_P, \dot{y}_P)$を求めて下さい．ただし，円柱が回転するときの角速度を時間 t の関数 $\omega(t)$とします．

解説

問 1

●出題の目的

受験者が全く学習していないかどうかを確認することが出題の目的である．

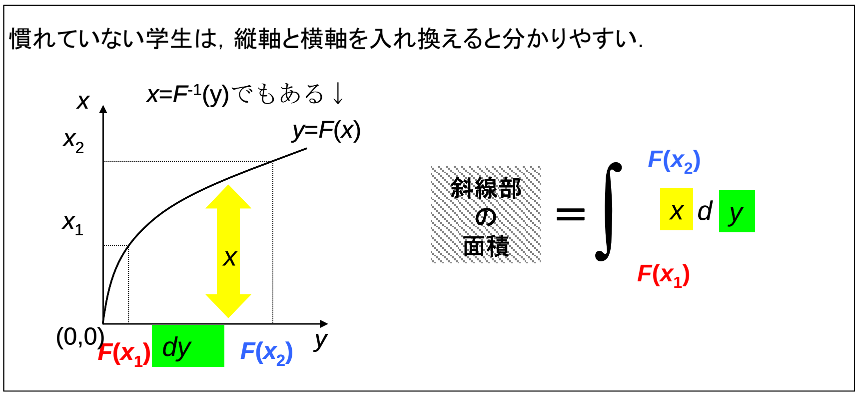
問われている内容は高校課程の学習内容であり，本来は大学の講義時間を使って確認する内容ではないが，今後の専門科目を理解する上で出題された積分の理解は必要条件になる．授業中に復習を促がしており，解説も行なっているため，この問題を正解できないことは，全く学習していないことを表わす．

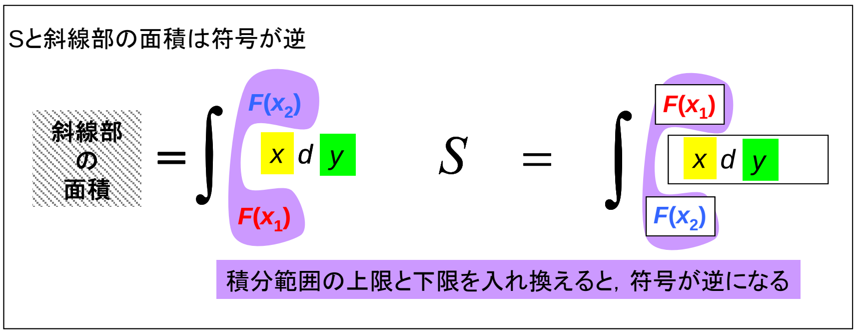
●解答例

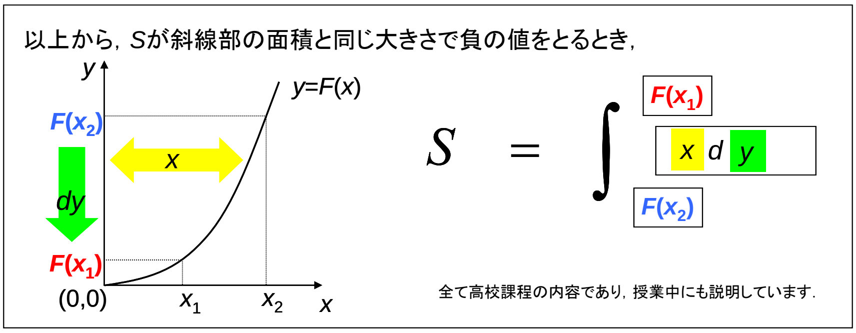
$$S = \int_{F(x_2)}^{F(x_1)} xdy = -\int_{F(x_1)}^{F(x_2)} xdy$$

●解説

右図のような関係．







問 2

●出題の目的

SI 単位と高校課程の物理の理解を確認する目的で出題した問題である．流体から受ける抗力の知識は全く求めていない．

問われている内容は，出力が 1 秒当りの仕事であること，力とそれに逆らって進む距離の積が仕事になること，単位時間当たりに進む距離が速度であること，など初歩的な問題である．この問題で正解を導く事ができ

ない学生は，力学を理解する能力を持たない．

●解答例

出力＝力×キョリ／時間の関係があるため

$$P = D \cdot U_{\infty}$$

$$= C_{\mathrm{D}} \frac{1}{2} \rho U_{\infty}^{2} S \cdot U_{\infty}$$

$$= C_{\mathrm{D}} \frac{1}{2} \rho S \cdot U_{\infty}^{3}$$

よって以上より３乗に比例する．

●解説

解答の説明は少々雑でも構わないので，抗力と速度の積が出力になることを示し，出力が速度の３条に比例することを示し，その旨を記述したら良い．

問３－１

●出題の目的

基本的な積分の意味を理解していること, および基本的な力学的な知識を用いて式を作れることを確認する問題である．

証明方法が指定されているが，重心とモーメントの関係を感覚的に分かっていること，および感覚的な理解を数式で表現できることが解答する際に求められる能力である．数式で表現する際に，積分を用いる必要がある．

●解答例

線分 BC は　$y = b - \frac{b}{\mathrm{a}} x$　で表わされる．　（１）

ここで重心の座標を（$x_{\mathrm{G}}, y_{\mathrm{G}}$）とすると x 軸方向の重心まわりのモーメントはつりあうから

$$0 = \int_0^a \left(b - \frac{b}{a} x \right) \left(x - x_G \right) dx$$

この式を x_{G} について整理する

$$x_G = \frac{\int_0^a \left(\frac{b}{a} x^2 - bx \right) dx}{\int_0^a \left(\frac{b}{a} x - b \right) dx}$$

$$= \frac{\left[\frac{1}{3a} x^3 - \frac{1}{2} x^2 \right]_0^a}{\left[\frac{1}{2} x^2 - x \right]_0^a}$$

$$= \frac{a}{3} \qquad (2)$$

同様に y 軸方向の重心まわりのモーメントについて考える．

$$0 = \int_0^b \left(a - \frac{a}{b} y \right) \left(y - y_G \right) dy$$

この式を y_G について整理すると y_G＝b/3 となる．
よって以上より重心の座標は$(a/3, b/3)$になる．

●解説

この問題では y 軸方向の重心まわりのモーメントを「同様に」と説明を省略できた．重心を求める図形の形状や向きによっては，それぞれ計算しなければいけないこともある．式（1）の次の式を導くことができれば，あとは計算するだけで終わる．

細かい計算は計算用紙に書き，解答用紙には計算結果のみを記すことも許容される．なおこの問題では特に解答に式番号を設けなくても不都合はない．

問３－２

●出題の目的

三角関数や行列の計算をすること，および説明を文章で記述することを求める問題である．

●解答例

点 A を中心に回転するときの重心の座標（x'_G, y'_G）は

$$\begin{pmatrix} x'_G \\ y'_G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \end{pmatrix} \qquad (３－２－１)$$

ここで重心 x'_G が 0 より小さいときに点 C が水平面に向かって倒れる．

よって式（３－２－１）から

$$x'_G = x_G\cos\theta - y_G\sin\theta = 0 \qquad (３－２－２)$$

この式から，

$$\tan\theta = \frac{x_G}{y_G} \qquad (３－２－３)$$

式（３－２－３）と（x'_G, y'_G）＝$(a/3, b/3)$から

$$\theta = \arctan\frac{a}{b}$$

よって θ が　$\arctan\dfrac{a}{b}$　より大きくなると，点 C が水平面に向かって倒れる．

●解説

三角関数が十分に整理できていない場合は減点しました．式（３－２－１）は，授業中の車の重心を求める例題の解説のような方法で x'_G のみを対象にしても良い．

問４－１

●出題の目的

知識や暗記に頼らず，自分の頭で考えることを求める問題である．

円弧と中心角と半径の関係を知っていれば，特に理屈は無い．不正解の人は考える意欲が無いことを示している．不正解の者は意識を変えないと，専門科目を理解することはできない可能性が高い．

●解答

$$\theta = -\frac{x_G}{r}$$

●解説

円弧と中心角と半径の関係を忘れている人は勉強不足が過ぎる.

問４－２

●出題の目的

数式で記述された内容を理解し，同様に自らも数式で記述できることを求める問題である.

講義中にも述べたように，テキスト等で数式が説明のための表現として用いられる場合もある．読みとることができなければ理解できないし，数式で表現できなければ工学的に取扱うこともできない．「平面運動」や「相対運動」として講義中の板書やテキストで扱われている内容であり，これを読み取る努力が「学ぶ」ということの一部であると学生は認識するべきである.

●略解（テストでこのような解が記述されていると，説明不十分なため，気分によっては大幅に減点します.）

$$\begin{pmatrix} x_{\mathrm{P}} \\ y_{\mathrm{p}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{\mathrm{C}} \\ y_{\mathrm{C}} \end{pmatrix} + \overrightarrow{\mathrm{CP}} = \begin{pmatrix} x_{\mathrm{C}} \\ y_{\mathrm{C}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{\mathrm{C}} + r\sin\theta \\ y_{\mathrm{C}} - r\cos\theta \end{pmatrix} \qquad (４－２－１)$$

問(4-1)の解より $x_{\mathrm{C}} = -r\theta$ （４－２－２）

また，常に $y = r$ である. （４－２－３）

よって式（４－２－１）（４－２－２）（４－２－３）より

$$\begin{pmatrix} x_{\mathrm{P}} \\ y_{\mathrm{p}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\theta + r\sin\theta \\ r - r\cos\theta \end{pmatrix}$$

●解説

平面運動において ξ - η 座標の原点を円柱の中心に置き， ξ - η 座標を円柱と共に回転させている．「平面運動」と言っているが， $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{CP}}$ のベクトルで考えているだけである.

問４－３

●出題の目的

目的は問４－２と同じであるが，微分を扱うところが異なる．微分が理解できていることと，微分の計算をコツコツと丁寧に進めることが学生に求められる.

●略解（適切な文で記述された説明が，解には必要です.）

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{\mathrm{P}} \\ \dot{y}_{\mathrm{p}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{d}{dt}\left(-r\theta + r\sin\theta\right) \\ \dfrac{d}{dt}\left(r - r\cos\theta\right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -r\dot{\theta} + r\dot{\theta}\cos\theta \\ r\dot{\theta}\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$
= \begin{pmatrix} -r\omega(\tau) + r\omega(\tau)\cos\theta \\ r\omega(\tau)\sin\theta \end{pmatrix}
$$

●解説

特に無い.

全体の配点

問1：１５，問２：１５，問３：３０，問４：４０