機械工学基礎・演習　後期　加藤担当分　試験（平成 23 年 1 月 12 日 5 限 203 号教室）

問題は 4 問です．解答は解答用紙（3 枚まで使用可）に記入して下さい．なお計算用紙は回収しません．

1.　式(1)の S が，絶対値は図 1 の斜線部の面積と同じで，負の値を示すように，空欄に記入して完成した式を回答用紙に記入して下さい．

$$S = \int_{\boxed{}}^{\boxed{}} \boxed{} = -\int_{\boxed{}}^{\boxed{}} \boxed{} \tag{1}$$

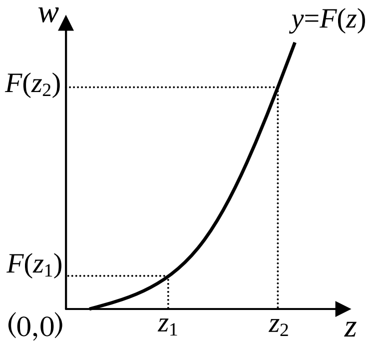

図 1　x の関数 y と積分

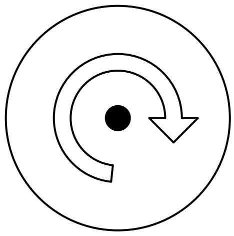

図 2　円盤と回転方向

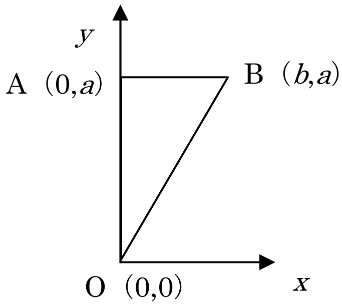

図 3　横たわる三角柱の断面

2.　図 2 のような一様な質量 m kg 半径 r m の円盤が中心軸を通る回転軸の周りの慣性モーメントが式(2)で与えられている．

(2-1)　慣性モーメントの単位を求めてください．

(2-2)　円盤の慣性モーメントが半径の何乗に比例するか, 質量 m が半径 r の関数になることに注意して，説明して下さい．

$$I_Z = \frac{mr^2}{4} \tag{2}$$

3.　一様な厚みと密度で断面が図 3 のような直角三角形をした三角柱がある．x-y 座標で三角柱の重心が$(x_G, y_G) = (b/3, 2a/3)$になることを，重心まわりのモーメントがつりあうという関係から式を作って計算し，証明して下さい．

4.　図 4 のように扇形の断面の物体が，水平な x 軸上を滑らずに転がる．扇形の弧の半径を r，円弧上のどこからも距離が r になる点を C とし，その座標を(x_C, y_C)とする．点 P は円弧上の点で，図 4 が示すように $x_C = 0$ の時に y 軸と線分 CP のなす角が α である．転がる扇形の上に運動座標系 C-$\xi\eta$ を固定して考え，点 P(x_P, y_P)の軌跡と x-y 座標から見た絶対速度を求める．

(4-1)　η 軸が y 軸となす角を θ とするとき，θ と座標 x_C の関係を根拠と共に説明して下さい．

(4-2)　点 P の軌跡(x_P, y_P)を η 軸と y 軸のなす角 θ，α および半径 r を用いて表して下さい．

(4-3)　η 軸と y 軸のなす角 θ が時間 t の関数 ωt で，なおかつ ω が定数の場合に，点 P の x-y 座標から見た絶対速度の成分$(\dot{x}_P, \dot{y}_P)$を求めて下さい．

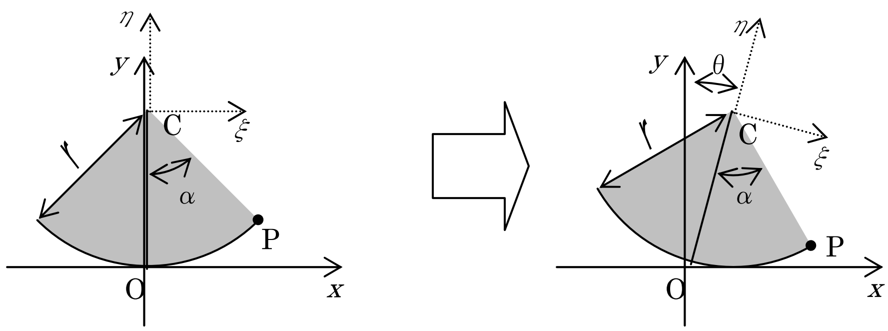

図 4　転がる扇形の断面の物体

解説

問１　（配点 15，正答率 32%）

●出題の目的

受験者が全く学習していないかどうかを確認することが出題の目的である．

●解答例

$$S = \int_{F(z_2)}^{F(z_1)} zdw = -\int_{F(z_1)}^{F(z_2)} zdw$$

●解説

主な解説は 2009 年度の問題の解説を参照してもらいたい．なお，問題の図中に記号の誤りがあるため，上記の解答例の w が y であった場合も正解とする．

積分範囲を誤って計算結果の正と負が入れ替わる誤答が目立った．

問２－１（配点８，正答率７３％）

●出題の目的

SI 単位の理解を確認する目的で出題した問題である．慣性モーメントの知識は全く求めていない．

●解答例

kg･m^2

●解説

この問題で正解を導く事ができない学生は，力学を理解する能力を持たない．

単位の m と kg が逆になっている解答は半分減点した．

問２－２（配点７，正答率２５％）

●出題の目的

文章で記述されている内容を理解して確認する意志を確認する目的で出題した問題である．

●解答例

適当な定数を a と置いて，円盤の質量 m は $a\pi r^2$ で表わすことができる．

$$I_Z = \frac{(a\pi r^2)r^2}{4}$$

$$= \frac{a\pi r^4}{4}$$

よって以上より 4 乗に比例する．

●解説

解答の説明は少々雑でも構わないので，「質量 m が半径 r の関数になることに注意して」という問題文の注意に対応することが求められる．

この問題で正解を導く事ができない学生は，専門科目の教科書を自力で読む意志に欠ける．

問３（配点 30，正答率 25%）

●出題の目的

基本的な積分の意味を理解していること, および基本的な力学的な知識を用いて式を作れることを確認する問題である.

証明方法が指定されているが，解答する際に求められる能力は，重心とモーメントの関係を感覚的に分かっていること，および感覚的な理解を数式で表現できることの二つである.

●解答例

座標を（x_G, y_G）とする.

x 軸方向の重心を通る y 軸まわりのモーメントについて考える.

座標 x における三角柱上の微小な幅 dx の物体の質量が，$m(x)dx$ に比例するものとする.

x 軸方向の重心を考える際のモーメントは$(x - x_G)m(x)dx$ に比例する.

物体の重心周りのモーメントはつりあうので，これを x が x=0 から x=b まで積分したものは 0 になるので，

$$0 = \int_0^b m(x)(x - x_G)dx \quad . \tag{1}$$

ここで，$y = \frac{a}{b}x$ なので図より，

$$m(x) = a - \frac{a}{b}x \tag{2}$$

式（１），（２）より

$$0 = \int_0^b \left(a - \frac{a}{b}x\right)(x - x_G)dx \tag{3}$$

（解答例では計算を略します）

よって x_G＝b/3 （４）

同様に y 軸方向の重心を考えると，

$$0 = \int_0^a \left(\frac{b}{a}y\right)(y - y_G)dy \tag{5}$$

（解答例では計算を略します）

$$y_G = \frac{2}{3}a \tag{6}$$

よって式（４），（６）より重心の座標は$(b/3, 2a/3)$である.

●解説

部分点は以下のように定めた．式（１）に相当する式を適切に導くまで：10 点，解答例で省いた積分の計算を正しく記述：2 点，y_G を正しく導く：2 点，説明を適切に記述している：2 点，式（３）に相当する式を求める： 7 点，x_G を正しく導く：8 点．なお説明は少々つたなくても可としている.

解答例で省略した式（３）および式（５）の展開は，それぞれ式（３）と式（５）をそのまま積分した後に x_G と y_G について整理する方法と，x_G と y_G について整理した後に積分の計算をする方法がある．回答用紙には

計算の方針が分かるように記述したら良く，細かい計算は解答用紙に記述しなくても良いものとした．なおこの問題では特に解答に式番号を設けなくても不都合はない．

正答率 25%は部分点のみの学生を省いた値である．問３で全く部分点をとれていない学生は勉強不足が甚だしい．式（２）の関係が分からなかった者は，式（１）の意味を理解しておらず，授業中に説明された式を暗記しただけである．理解した気になっていた者もいると思うが，試験前に自分で演習問題を解いて理解を確認していれば避けられることである．試験時間中に努力した跡が見られる者も多いが，その努力は試験開始までに済ますべきである．

問４－１（配点 15，正答率 40%）

●出題の目的

角度と半径の積が弧の長さになる関係を認識していることを確認する問題である．

●解答例

円弧と x 軸の接点から点 C まで伸ばした線分は x 軸と垂直に交わる．この接点の移動距離は x_c であり，円弧が転がった長さと等しい．円弧の転がる長さは条件から $r\theta$ なので $x_c = r\theta$ である．

●解説

円の中心に相当する単語が円弧に無いために説明に手間がかかるが，点 C を中心として半径 r の円が $\theta=0$ から $\theta=\alpha$ まで転がる状態を考えても状況は一緒である．

問４－２（配点 15，正答率８%）

●出題の目的

三角関数や行列の計算をすること，および説明を文章で記述することを求める問題である．

●略解（テストでこのような解が記述されていると，説明不十分なため，気分によっては大幅に減点します．）

$$\begin{pmatrix} x_P \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix} + \overrightarrow{CP} = \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r\sin\alpha \\ -r\cos\alpha \end{pmatrix} \qquad (4-2-1)$$

問(4-1)の解より $x_C = r\theta$ （４－２－２）

また，常に $y = r$ である． （４－２－３）

よって式（４－２－１）（４－２－２）（４－２－３）より

$$\begin{pmatrix} x_P \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\theta + r\sin\alpha\cos\theta - r\cos\alpha\sin\theta \\ r - r\sin\alpha\sin\theta - r\cos\alpha\cos\theta \end{pmatrix}$$

●解説

問４－１が不正解でも，問４－１で求めた式に基づいて進めた作業について評価を行った．部分点は以下の通り，点 P 位置ベクトルで表わし $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP}$ の関係を示す : 10 点，図 4 左の状態のベクトル $\overrightarrow{CP}$ を表わす : 2 点，図 4 右側のベクトル $\overrightarrow{CP}$ を正しく表現する：2 点，最後まで正しく求める：1 点である．

問４－２を解答していない者が多い．回転行列の考え方は 2010 年 12 月 13 日の講義の通りである．一般的に説明される回転行列の θ は反時計回りに回転した角度として説明され，問題の図４とは逆方向である．この

誤りが多い．同じ θ でまぎらわしいが，出題者が配慮することではなく，解答者に対処して頂きたい．

問４－３（配点 10，正答率 4%）

●出題の目的

微分の計算をコツコツと丁寧に進めることが学生に求められる．問４－２で誤りがあっても正しく微分できていれば良いものとした．

●解答例省略

●解説

問４－３に取り組んでいる者も元々少ないが，問４－２と問４－３を同時に正答した者がいなかった．

$\dfrac{dx_{\mathrm{P}}}{dt} = \dfrac{dx_{\mathrm{P}}}{d\theta}\dfrac{d\theta}{dt}$ の $\dfrac{d\theta}{dt}$ が抜けている誤答が目立ち，計算に不慣れな者が多いという印象を受けた．