機械数学Ⅰ（2014 年度後期）期末テスト問題（2015 年 2 月 9 日 1 限　工学部講義棟 203 号教室）

以下の設問に解答してください．ただし問 5 は問 5A と問 5B から 1 問選んで解答してください．また問 6 も問 6A，問 6B，問 6C，問 6D から 1 問を選んで解答してください．複数解答しても，評価に反映するのは問 5 および問 6 からそれぞれ 1 問だけです．解答は設問の番号順でなくても構いません．解答用紙は **4 枚提出してください**．各解答用紙の右上に名前と学籍番号を明記し，片面のみ記入してください．裏面の解答は無効とします．

1. 以下の各小問が定める条件で dy/dx を求めて下さい．ただし x と y と t は変数であり，m と n は 0 や-1 以外の定数で，a, b も定数です．

(1) $y = ax^n$，(2) $y = \dfrac{a}{x}$，(3) $y = ae^x$，(4) $y = ae^t \quad t = bx^m$，(5) $y = ae^{nx} \cdot x^m$

2. 絶対値が図 1 の斜線部の面積と同じで負の値を示す S が得られるように，空欄をうめて完成させた式 (1) を回答用紙に記述してください．なおこの問題では，逆関数は使いませんし，$y=F(x)$ も具体的な関数は指定していません．

$$S = \int_{\square}^{\square} \square = -\int_{\square}^{\square} \square \qquad (1)$$

3. 一秒当たり n 回転して P ワットの出力を発生させる回転軸のトルク T を SI 単位 N･m で求めて下さい．トルクは，力のモーメントと同じ意味で，回転方向にかかる力の大きさとその作用点と回転中心の距離の積です．

4. 図 2 および式(2)において，θ および x_1，y_1 が時間の関数で，r と ξ が定数である．なお r は点 (x_1, y_1) と点 (x_3, y_3) の距離である．このときの点 (x_3, y_3) の加速度を数式で示してください．

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r\cos\xi \\ r\sin\xi \end{pmatrix} \qquad (2)$$

5A. 比熱 C_p が 200～900K の温度範囲において式(3)で表された時，この物質 m kmol が **400K から 800K** まで加熱されるときに必要なエネルギーを求めてください．

$$c_p = 24.085 + 0.75492\left(\frac{T}{100}\right) + 0.0043693\left(\frac{T}{100}\right)^2 + 8.3192\left(\frac{100}{T}\right) \quad [\mathrm{kJ/(kmol \cdot K)}] \qquad (3)$$

5B. 1000W の電気ポットを用いて，20℃の水 1 kg を 100℃にしたい．放熱損失は入熱量の 15%であるとして，所要時間をもとめてください．なお，この問では比熱を 4.2 k J/(kg･K)とします．

6A. 半径が r の「球」の体積が$(4\pi r^3)/3$ になることを証明してください．ただし球の表面積が $4\pi r^2$ で，半径 r で積分したものが．球の体積に相当する関係は利用しないでください．

6B. 一様な厚みと密度で断面が図 3 のような直角三角形をした三角柱が横たわっている．図 3 の x-y 座標で直角三角形 OAB の重心 G の x 座標 x_G が $a/3$ になることを，重心まわりのモーメントがつりあうという関係から式を作って計算し，証明して下さい．

6C. 素材が均質で断面積が一定の棒があったとして，棒の端を回転中心とする場合の慣性モーメントは，棒の真ん中を回転中心とする場合の何倍になるか，求めてください．慣性モーメントは，質量 dm の回転中心からの距離を r として，r^2dm を全体に積分することで求められます．

6D. 厚さと密度が一様な質量 m kg 半径 r m の円盤において，中心軸を通る回転軸の周りの慣性モーメントを求めてください．慣性モーメントは，質量 dm の回転中心からの距離を r として，r^2dm を全体に積分することで求められます．

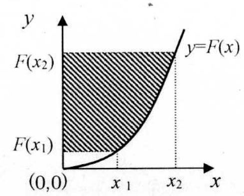


図 1　x の関数 y と積分

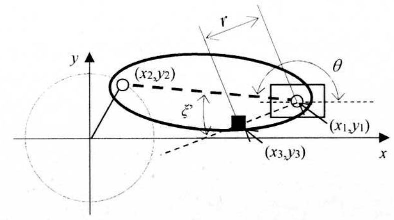


図 2　オフセットクランク機構の中間節に掛かる慣性力の解析

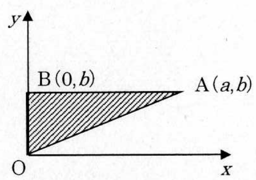


図 3　横たわる三角柱の断面

答案の返却および評価の異議申し立ては，2014 年 2 月第 3 週に受け付ける予定です．日程は機械棟 1 階の掲示板で通知します．希望する学生は担当者の居室を訪問してください．

解答例

１．

(1) $\dfrac{dy}{dx}=anx^{n-1}$, (2) $\dfrac{dy}{dx}=-anx^{-2}$, (3) $\dfrac{dy}{dx}=ae^{x}$

(4) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\dfrac{dt}{dx}=ae^{t}\cdot bmx^{m-1}=abmx^{m-1}e^{bx^{m}}$

(5) ２２

$$=anx^{m}e^{nx}+amx^{m-1}e^{nx}$$

2.

$$S=\int_{F(x_2)}^{F(x_1)} xdy=-\int_{F(x_1)}^{F(x_2)} xdy$$

3.

力を F, 移動距離を L, 時間を t として,

$$P=\frac{FL}{t} \qquad (1)$$

ここで回転中心からの力の作用点までの距離を r としたとき,

$$F=\frac{T}{r} \qquad (2)$$

$$L=2\pi rnt \qquad (3)$$

式(1)に式(2)(3)を代入する

$$P=\left(\frac{T}{r}\right)(2\pi rnt)\frac{1}{t}$$

$$=2\pi nT \qquad (4)$$

式(4)をトルク T について整理したものが 1 秒に n 回転して P ワットを出力するときのトルクである.

$$T=\frac{P}{2\pi n}$$

4.

位置を時間 t で 2 階微分したものが加速度になる.

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}x_3\\y_3\end{pmatrix}=\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix}\frac{d}{dt}\cos\theta & \frac{d}{dt}(-\sin\theta)\\ \frac{d}{dt}\sin\theta & \frac{d}{dt}\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r\cos\xi\\ r\sin\xi\end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{d}{dt}(r\cos\xi)\\ \frac{d}{dt}(r\sin\xi)\end{pmatrix}$$

$$=\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}-\frac{d\theta}{dt}\begin{pmatrix}\sin\theta & \cos\theta\\ -\cos\theta & \sin\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r\cos\xi\\ r\sin\xi\end{pmatrix}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix}x_3\\y_3\end{pmatrix}=\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$$

$$-\frac{d^2\theta}{dt^2}\begin{pmatrix}\sin\theta & \cos\theta\\ -\cos\theta & \sin\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r\cos\xi\\ r\sin\xi\end{pmatrix}$$

$$-\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r\cos\xi\\ r\sin\xi\end{pmatrix}$$

5A.

比熱を温度で積分し, 質量を乗じた値が熱量となる.

$$Q=m\int_{400}^{800}C_p dT$$

ここで与えられた式(2)の係数を以下のように表す.

a=24.085, b＝0.75592/100, c=0.0043693/100^2,

d=8.3192×100

以上より

$$\frac{Q}{m}=a(800-400)+\frac{b}{2}\left(800^2-400^2\right)+\frac{c}{3}\left(800^3-400^3\right)$$

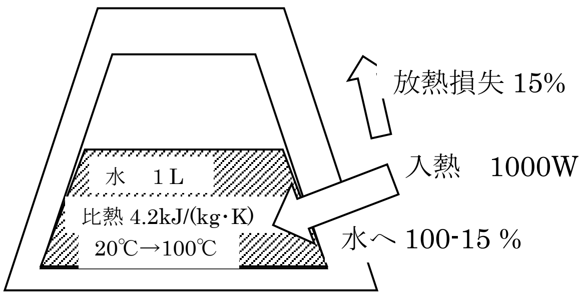
$$+d\ln\frac{800}{400}$$

=12087kJ

=12MJ

よって必要なエネルギは 12m MJ

5B.



電気ポットの出力を PW, 放熱損失を 15%とすると水に与える熱量 Q_1 は所要時間を t 秒として

$$Q_1 = P\left(\frac{100-15}{100}\right)\times t \qquad (1)$$

また比熱 4.2 kJ/(kg･K)の水 1 kg を 20 から 100 に加熱する際に要する熱量 Q_2 は

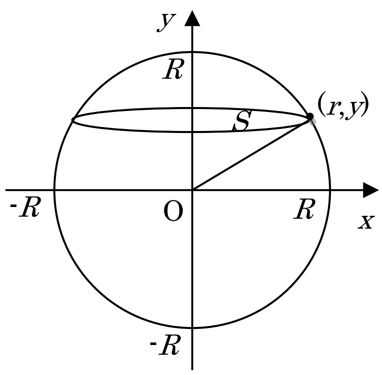
$$Q_2 = 4.2\times1000(1)(100-20) \qquad (2)$$

ここで $Q_1 = Q_2$ なので式(1)(2)を時間 t について整理すると

$$t = \frac{4.2\times1000(1)(100-20)}{1000\left(\frac{100-15}{100}\right)}$$

よって所要時間は 6 分 35 秒

6A.



図のような状態で y 軸に垂直な断面 S の半径 r とすると式(1)(2)が得られる

$$r^2 = R^2 - y^2 \qquad (1)$$

$$S = \pi r^2 \qquad (2)$$

また球の体積 V は

$$V = \int_{-R}^{R} S dy \qquad (3)$$

式(3)に式(1)(2)を代入

$$V = \int_{-R}^{R} \pi\left(R^2 - y^2\right)dy$$

$$= 2\pi\left(R^3 - \frac{R^2}{3}\right)$$

$$= \frac{4}{3}\pi R^3$$

以上より，球の体積は半径を R とすると $4\pi R^3/3$ で示される

6B.

ある x 座標で y 軸に平行な直線が線分 BA と線分 OA に交わる二つの交点の距離は式(1)で表される.

$$y = b - \frac{b}{\mathrm{a}}x \qquad (1)$$

ここで重心の座標を（x_G, y_G）とすると x 軸方向の重心まわりのモーメントはつりあうから

$$0 = \int_0^a \left(b - \frac{b}{a}x\right)\left(x - x_G\right)dx \qquad (2)$$

この式(2)を x_G について整理する

$$x_G = \frac{\int_0^a \left(\frac{b}{a}x^2 - bx\right)dx}{\int_0^a \left(\frac{b}{a}x - b\right)dx}$$

$$= \frac{\left[\frac{1}{3a}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right]_0^a}{\left[\frac{1}{2}x^2 - x\right]_0^a}$$

$$= \frac{a}{3}$$

以上より, 図 3 の三角形の重心の x 座標は $a/3$ である

6C.

棒の断面積と密度をそれぞれ S, ρ とし，長さを l とする.

棒の中心を回転中心とする慣性モーメント I_c は

$$I_C = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} r^2 dm \qquad (1)$$

またこのとき

$$dm = \rho S dr \qquad (2)$$

式(1)(2)より

$$I_C = \rho S \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} r^2 dr$$

$$= \frac{\rho S l^3}{4 \cdot 3} \qquad (3)$$

次に棒の端を回転中心とする慣性モーメント I_E は

$$I_E = \int_0^l r^2 dm \qquad (4)$$

式(2)(4)より

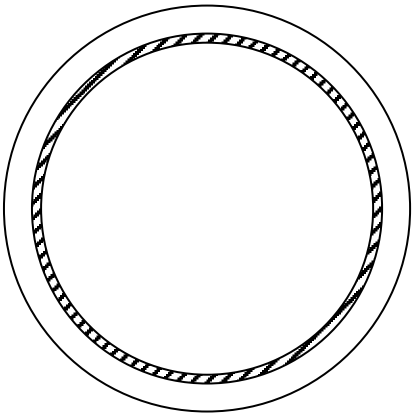
$$I_E = \rho S \int_0^l r^2 dr$$

$$= \frac{\rho S l^3}{4 \cdot 3} \qquad (5)$$

式(3)(5)より $I_E / I_C = 4$

よって 4 倍

6D.



図の斜線部の慣性モーメントを微小部分とし, 半径 0 から r まで積分する.

円盤の密度と厚みをそれぞれ ρ， t とし，図の斜線部のリングの半径とリングの厚みをそれぞれ x, dx とする. 斜線部の内径と外径の差は無視できるとして，斜線部の慣性モーメント dI は

$$dI = y^2 dm \qquad (1)$$

また

$$dm = \rho \cdot t \cdot 2\pi y dy \qquad (2)$$

式(1)(2)より

$$I = \int_{-y=0}^{y=r} dI$$

$$= \int_0^r y^2 \cdot \rho \cdot t \cdot 2\pi y dy$$

$$= 2\pi\rho t \int_0^r y^3 dy$$

$$= \frac{\pi\rho t r^4}{4} \qquad (3)$$

ここで $m = \pi\rho t r^2$ であるから，式(3)は

$I = \dfrac{mr^2}{4}$ となる.

以上より，質量 m kg 半径 r m の円盤において，中心軸を通る回転軸の周りの慣性モーメントは $mr^2/4$ である

配点

- 問1　各 3 点.
- 問2　問 2　20 点.
- 問3　問 3　20 点（備考 : 説明を１０点，計算を 10 点とした. 尋ねられたことに回答していない答案は半分とした. また求めたトルクの次元がおかしいものは不可とする.）
- 問4　5 点（内訳は説明 2 点，計算が 3 点，速度が正しく計算できていれば部分点 1 点とした.）
- 問5　20 点（説明 8 点，計算の進め方 2 点，有効数字の処理 2 点，数値解の正しさ 8 点）
- 問6　20 点（説明 8 点，計算の進め方 4 点，数値解の正しさ 8 点）