機械数学Ⅰ（2015 年度後期）期末テスト問題（2016 年 2 月 8 日 1 限　工学部講義棟 203 号教室）

以下の設問に解答してください．ただし問 7 は問 7A，問 7B，問 7C から 1 問を選んで解答してください．問 7 を複数解答しても，評価に反映するのは 1 問だけです．解答は設問の番号順でなくても構いません．解答用紙は **4 枚提出してください**．各解答用紙の右上に名前と学籍番号を明記し，片面のみ記入してください．裏面の解答は無効とします．

1. 以下の各小問が定める条件で dy/dx を求めて下さい．x と y は変数であり，a と n は 0 以外の定数です．

(1) $y = ax^n$，(2) $y = ae^x$

2. 式(1)(2)の関係を利用するオイラー法を参考に，表 1 において x=5.50 の dy/dx を算出してください．

$$x_1 = x_0 + h \tag{1}$$

$$y_1 = y_0 + h\frac{dy}{dx} \tag{2}$$

3. 図 1 および式(3)において，θ と x_1 が時間 t の関数で，y_1 と r と ξ が定数であるとき，点（x_3, y_3）の加速度を数式で示してください．点（x_1, y_1）は $y=y_1$ を保ちながら往復運動し，点（x_2, y_2）は原点を中心に回転運動し，点（x_3, y_3）は点（x_1, y_1）と点（x_2, y_2）をつなぐ連接棒上の 1 点である．また，θ は点（x_1, y_1）と点（x_2, y_2）を結ぶ線分と x 軸のなす角，r は点（x_1, y_1）と点（x_3, y_3）の距離，ξ は連接棒において点（x_1, y_1）と点（x_2, y_2）を結ぶ線分と点（x_1, y_1）と点（x_3, y_3）を結ぶ線分のなす角である．なお，この設問において，θ と x_1 の挙動は算出せず，解答中も θ と x_1 の変数で記述してください．

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r\cos\xi \\ r\sin\xi \end{pmatrix} \tag{3}$$

4. トルク 25.6 N･m で 1 分当たり 1200 回転する回転軸の出力を SI 単位で求めてください．トルクは，力のモーメントと同じ意味で，回転方向にかかる力にその作用点と回転中心の距離を乗じたものです．

5. 絶対値が図 2 の斜線部の面積と同じで負の値を示す S が得られるように，空欄をうめて完成させた式(4)を回答用紙に記述してください．なおこの問題では，逆関数は使いませんし，$y=F(x)$ も具体的な関数は指定していません．

$$S = \int_{\square}^{\square} \boxed{} = -\int_{\square}^{\square} \boxed{} \tag{4}$$

6. 比熱 C_p が 200～900K の温度範囲において式(5)で表された時，この物質 m kmol が **400K から 800K** まで加熱されるときに必要なエネルギーを求めてください．

$$c_p = A + B\left(\frac{T}{100}\right) + C\left(\frac{T}{100}\right)^2 + D\left(\frac{100}{T}\right) \quad [\mathrm{kJ/(kmol \cdot K)}] \tag{5}$$

7A. 半径が r の「球」の体積が$(4\pi r^3)/3$ になることを証明してください．ただし球の表面積 $4\pi r^2$ を半径 r で積分したものが球の体積になる関係は利用しないでください．

7B. 一様な厚みと密度で断面が図 3 のような直角三角形をした三角柱が横たわっている．図 3 の x-y 座標で直角三角形 OAB の重心 G の x 座標 x_G が $a/3$ になることを証明してください，この照明において，「y 軸(x=0)からの距離と質量の積に比例するモーメントを考えた際に，分割した微小要素のモーメントの総和が, 物体全体の質量と重心まで距離から求めるモーメントに等しい」と示す式を用いてください．

7C. 断面積 S と密度 ρ が均一で，長さが L の棒があったとして，棒の中心を回転中心とする場合の慣性モーメントを求めてください．慣性モーメントは，質量 dm の回転中心からの距離を r として，r^2dm を全体に積分することで求められます．

表 1　オイラー法を参考に dy/dx を計算する問題のための数値

x	1.00	2.00	4.00	7.00	11.00
y	1.00	8.01	25.02	48.03	81.04

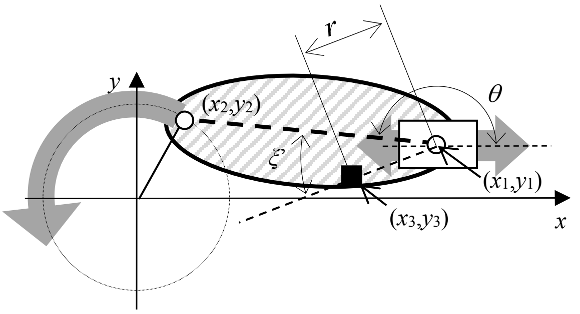


図 1　オフセットクランク機構の中間節に掛かる慣性力の解析

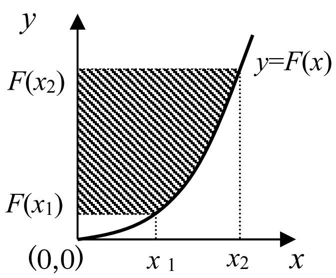


図 2　x の関数 y と積分

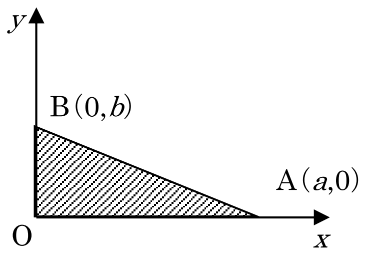


図 3　横たわる三角柱の断面

答案の返却および評価の異議申し立ては，2016 年 2 月 16・17・19 日に受け付ける予定です．日程は改めて機械棟 1 階の掲示板で通知します．希望する学生は担当者の居室を訪問してください．

解答例

１．

(1) $\dfrac{dy}{dx}=anx^{n-1}$, (2) $\dfrac{dy}{dx}=ae^{x}$

２．

式(1)(2)を整理すると式(3)が得られる．

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y_0-y_1}{x_0-x_1} \tag{2-1}$$

ここで 4 と 7 の平均が 5.5 であり，式(2-1)より x が 4 から 7 の間の変化の割合を x=5.50 における *dy*/*dx* とする．よって

$$\frac{dy}{dx}=\frac{48.03-25.02}{7-4}=7.67 \tag{2-2}$$

以上より，x=5.50 において *dy*/*dx*=7.67 である．

3.

位置を時間 t で 2 階微分したものが加速度になる．

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}x_3\\y_3\end{pmatrix}=\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix}\frac{d}{dt}\cos\theta & \frac{d}{dt}(-\sin\theta)\\ \frac{d}{dt}\sin\theta & \frac{d}{dt}\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r\cos\xi\\r\sin\xi\end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{d}{dt}(r\cos\xi)\\ \frac{d}{dt}(r\sin\xi)\end{pmatrix}$$

$$=\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}-\frac{d\theta}{dt}\begin{pmatrix}\sin\theta & \cos\theta\\ -\cos\theta & \sin\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r\cos\xi\\r\sin\xi\end{pmatrix}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix}x_3\\y_3\end{pmatrix}=\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$$

$$-\frac{d^2\theta}{dt^2}\begin{pmatrix}\sin\theta & \cos\theta\\ -\cos\theta & \sin\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r\cos\xi\\r\sin\xi\end{pmatrix}$$

$$-\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r\cos\xi\\r\sin\xi\end{pmatrix}$$

y_1 も定数であるから以上より，

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix}x_3\\y_3\end{pmatrix}=\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix}x_1\\0\end{pmatrix}$$

$$-\frac{d^2\theta}{dt^2}\begin{pmatrix}\sin\theta & \cos\theta\\ -\cos\theta & \sin\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r\cos\xi\\r\sin\xi\end{pmatrix}$$

$$-\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r\cos\xi\\r\sin\xi\end{pmatrix}$$

で点（x_3, y_3）の加速度が得られる．

4.

力を F, 移動距離を L, 時間を t として，

$$P=\frac{FL}{t} \tag{1}$$

ここで回転中心からの力の作用点までの距離を r としたとき，

$$F=\frac{T}{r} \tag{2}$$

$$L=2\pi rnt \tag{3}$$

式(1)に式(2)(3)を代入する

$$P=\left(\frac{T}{r}\right)(2\pi rnt)\frac{1}{t}$$

$$=2\pi nT \tag{4}$$

式(4)に n=1200/60, T=25.6 を代入する．

P=3.216W

=3.22kW

以上より，3.22kW である．

5.

$$S=\int_{F(x_2)}^{F(x_1)}xdy=-\int_{F(x_1)}^{F(x_2)}xdy$$

6.

比熱を温度で積分し，質量を乗じた値が熱量となる．

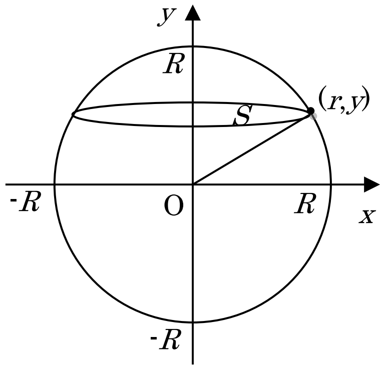
$$Q=m\int_{400}^{800}C_p dT$$

ここで上の式と式(5)より

$$Q=m\left\{A(800-400)+\frac{B(800^2-400^2)}{2\times100}+\frac{C(800^3-400^3)}{3\times100^2}+100D\ln2\right\}$$

$$=m(400A+2400B+14933C+69.3D)$$

7A.



図のような状態で y 軸に垂直な断面 S の半径 r とすると式(1)(2)が得られる

$$r^2 = R^2 - y^2 \quad (1)$$

$$S = \pi r^2 \quad (2)$$

また球の体積 V は

$$V = \int_{-R}^{R} S dy \quad (3)$$

式(3)に式(1)(2)を代入

$$V = \int_{-R}^{R} \pi \left(R^2 - y^2 \right) dy$$

$$= 2\pi \left(R^3 - \frac{R^2}{3} \right)$$

$$= \frac{4}{3} \pi R^3$$

以上より，球の体積は半径を R とすると $4\pi R^3/3$ で示される

7B.

この問題を2016年2月の期末試験で解答した学生はいないため，解答例は割愛する．

(4) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt}\dfrac{dt}{dx} = ae^t \cdot bmx^{m-1} = abmx^{m-1}e^{bx^m}$

(5) $= anx^m e^{nx} + amx^{m-1}e^{nx}$

7C.

長さ l の棒の中心を回転中心とする慣性モーメント I_c は

$$I_C = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} r^2 dm \quad (1)$$

またこのとき，棒の断面積と密度がそれぞれ S, ρ であるから，

$$dm = \rho S dr \quad (2)$$

式(1)(2)より

$$I_C = \rho S \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} r^2 dr$$

$$= \frac{\rho S l^3}{12} \quad (3)$$

以上より, 棒の中心を回転中心とする慣性モーメントは $= \dfrac{\rho S l^3}{12}$ である.

配点と解説

問 1

各 3 点

　さすがにこれが正解できない人はいないと思いますが，念のための確認です.

問 2

式(2-1)の記述：2.5 点

式(2-2)の記述：2.5 点

　dy/dx が「x の変化量に対する y の変化の割合」であることを認識できていることを確認するための設問です．そのため，問題の式(1)(2)に数値を代入してから h を消去する方法は不可とする．なお計算ミス等は-1.25 の減点とした.

問 3

時間で 2 階微分したものが加速度である旨の記述：3 点

速度の計算ができている：3 点

加速度の計算ができている：3 点

$dy_1/dx=0$ を反映している：１点

それぞれの評価項目は, 以下の確認事項に対応している.

・説明する意識がある
・$dy/dx=(dy/dt)(dt/dx)$の計算ができる
・$\frac{d}{dx}\{f(x)\cdot g(x)\}$
$=\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}\cdot g(x)+f(x)\cdot\frac{d}{dx}g(x)$ができる
・別の問題の丸暗記でない

問 4
20 点
ただし以下の項目で各 2.5 点の減点項目を設けた.

・数式の説明
・$P=2\pi nT$の記述
・回転数を１秒当たりに直す
・有効数字を妥当な方法で示す
・数値を正しく計算する
・出力を kW または W で回答する

問題の意図としては,「単位や次元を適切に取り扱う」「有効数字を適切に示す」ということを確認することである. なお解答において次元が出力にならないものは不可とした. また有効数字を有効桁数で丸める際に,「≒」を使用した場合も減点対象である.

問 5
20 点
積分が何をしているのか認識できていることを確認する問題である. 授業の時から述べているように, 適当に計算し易い数式と積分範囲を仮定して計算したら，自身の解答の妥当性が確認ができる.

問 6
20 点
ただし，以下を減点項目とした.

・説明ができていない：-50%
・記述で常用対数と自然対数の区別がない：-10%
・計算において常用対数と自然対数を混同：-40%
・定積分ができていない：-40%

出題の意図は，積分の計算の解釈に関する理解・積分の計算方法・単位や次元の確認・自然対数と常用対数の区別，などの確認をすることであった.

問 7
20 点
ただし主要な数式を適切に導いていない場合は, 40%減点した.

出題の意図としては, 積分を用いて現象等を適切に表現し, かつ自身の思考を記録に残せることである．なお問 7C で式（E7-1）やそれに相当する説明の記述無しに，式（E7-2)のみ記述されている場合は，減点した．実際の計算で式(E7-2)を使うことに何の問題も無いが，説明は説明と割り切るべきで, 考え方を記録し示すことが大事である. 計算結果が同じであるなら式（E7-1）を示すべきである.

$$I_C = \rho S\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} r^2 dr \qquad \text{(E7-1)}$$

$$I_C = 2\rho S\int_0^{\frac{l}{2}} r^2 dr \qquad \text{(E7-2)}$$

試験全体を通して, 些細な数値の入力ミスが答案だけで明らかになる場合, 適切に考え方の記録や説明がなされていたと判断できるため, 減点しない場合もある.

シラバスからの変更
授業の成績評価は，期末試験の点数 100%で評価します．５点を配分していた２回の小テストで受講者全体の達成度が低く, 期末試験で類似問題を出題したため, 小テストにおける能力評価は期末試験の一部で更新され評価したものとします.
また D 評価の学生に再試を実施します.