

以下の設問に解答してください。ただし問 7A と問 7B は、評価に 1 問だけ反映します。解答は設問の番号順でなくても構いません。解答用紙は **3 枚提出してください**。各解答用紙の右上に名前と学籍番号を明記し、片面のみ記入してください。裏面の解答は無効とします。

- $y = ax^n$ と $y = ae^x$ それぞれの dy/dx を求めてください。 x と y は変数で、 a と n は 0 以外の定数です。
- 式(1)(2)の関係を利用するオイラー法を参考に、表 1 において $x=5.0$ の dy/dx を算出してください。

表 1 オイラー法を参考に dy/dx を計算する問題のための数値

x	0.0	2.0	4.0	6.00	8.00
y	0.0	4.0	16.0	36.0	65.0

$$x_1 = x_0 + h \tag{1}$$

$$y_1 = y_0 + h \frac{dy}{dx} \tag{2}$$

- 図 1 のように扇形の断面の物体が、水平な x 軸上を滑らずに転がる。扇形の弧の半径を r 、円弧上のどこからも距離が r になる点 C の座標を (x_c, y_c) とする。円弧上の点 $P(x_p, y_p)$ の位置が式(3)で表され、 $x_c = 0$ の時に y 軸と線分 CP のなす角が α とするとき、角 θ を時間 t の関数、 α および半径 r を定数として、原点 O に対する点 P の運動の加速度を計算してください。

$$\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin \theta \\ r \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \sin \alpha \\ r \cos(-\alpha) \end{pmatrix} \tag{3}$$

- トルク $50.9 \text{ N}\cdot\text{m}$ で 1 分当たり 1280 回転する回転軸の出力を SI 単位で求めてください。トルクは、力のモーメントと同じ意味で、回転方向にかかる力にその作用点と回転中心の距離を乗じたものです。
- 絶対値が図 2 の斜線部の面積と同じで負の値を示す S が得られるように、空欄をうめて完成させた式(4)を回答用紙に記述してください。なお、逆関数は使わず、 $y=F(x)$ も具体的な関数は指定していません。

$$S = \int \text{[図 2 の斜線部]} = - \int \text{[空欄]} \tag{4}$$

- 最小メモリが 1mm の一般的な物差しを用いて表す際に、8.0cm を 9 等分した長さとして 10 倍した長さが、それぞれいくつにすべきか説明してください。
- 7A. 底辺の長さが X の直角三角形において、高さを Y 、重心の y 座標を y_G とする。この時 $y_G = Y/3$ になることを、分割した微小要素のモーメントについて言及して説明してください。
- 7B. 断面積 S と密度 ρ が均一で、長さが L の棒があったとして、棒の端から距離 $L/3$ の点を回転中心とする場合の慣性モーメントを求めてください。慣性モーメントは、質量 dm の回転中心からの距離を r として、 $r^2 dm$ を全体に積分することで求められます。

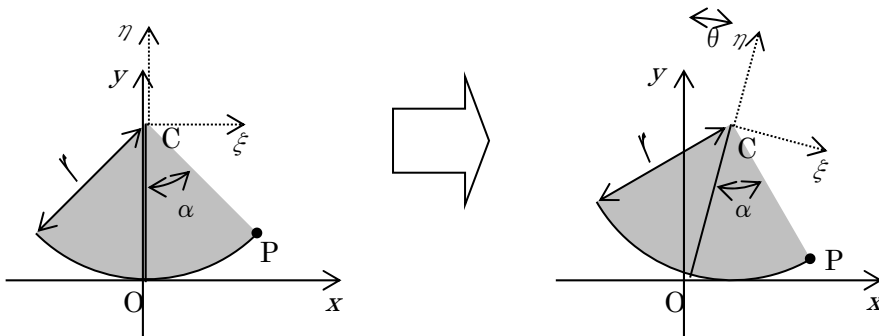


図 1 転がる扇形の断面の物体

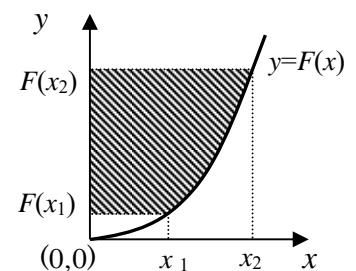


図 2 x の関数 y と積分

解答例

1.

$$(1) \frac{dy}{dx} = anx^{n-1}, (2) \frac{dy}{dx} = ae^x$$

2.

式(1)(2)を整理すると式(2-1)が得られる.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} \quad (2-1)$$

ここで4と6の平均が5であり, 式(2-1)よりxが4から6の間の変化の割合をx=5における dy/dx とする. よって

$$\frac{dy}{dx} = \frac{36 - 16}{6 - 4} = 10 \quad (2-2)$$

以上より, x=5において $dy/dx=10$ である.

3.

位置を時間 t で2階微分したものが加速度になる.

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} r \sin \theta \\ r \cos(-\alpha) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} \cos \theta & \frac{d}{dt} (-\sin \theta) \\ \frac{d}{dt} \sin \theta & \frac{d}{dt} \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \sin \alpha \\ r \cos(-\alpha) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} (r \sin \alpha) \\ \frac{d}{dt} \{r \cos(-\alpha)\} \end{pmatrix}$$

$$= r \frac{d\theta}{dt} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{d\theta}{dt} \begin{pmatrix} \sin \theta & \cos \theta \\ -\cos \theta & \sin \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \sin \alpha \\ r \cos(-\alpha) \end{pmatrix}$$

この式を更に時間 t で微分する.

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} = r \frac{d^2\theta}{dt^2} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} + r \frac{d\theta}{dt} \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} \cos \theta \\ \frac{d}{dt} \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{d^2\theta}{dt^2} \begin{pmatrix} \sin \theta & \cos \theta \\ -\cos \theta & \sin \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \sin \alpha \\ r \cos(-\alpha) \end{pmatrix}$$

$$+ \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \sin \alpha \\ r \cos(-\alpha) \end{pmatrix}$$

以上の計算で示される $\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix}$ が点Pの加速度である.

4.

力を F , 移動距離を L , 時間を t として,

$$P = \frac{FL}{t} \quad (1)$$

ここで回転中心からの力の作用点までの距離を r としたとき,

$$F = \frac{T}{r} \quad (2)$$

$$L = 2\pi r n t \quad (3)$$

式(1)に式(2)(3)を代入する

$$P = \left(\frac{T}{r} \right) (2\pi r n t) \frac{1}{t}$$

$$= 2\pi n T \quad (4)$$

式(4)に $n=1280/60$, $T=50.9$ を代入する.

$$P = 6823W$$

$$= 6.82kW$$

以上より, 6.82kWである.

5.

$$S = \int_{F(x_2)}^{F(x_1)} x dy = - \int_{F(x_1)}^{F(x_2)} x dy$$

6.

80mmを9等分すると $80 \div 9 = 8.9$ が得られる. 1mmが最小目盛りであるから, 9mmとなる. また8.0cmを10倍して9等分した長さは, ミリメートル単位で考えると $80 \times 10 \div 9 = 89$ となる. よって89mmである.

7A.

x軸上に長さ Y の底辺を配置した三角形において, 重心のy座標を y_G としてx軸周りのモーメントの釣り合いを考えると, 問題文の条件から式(7A-1)を得る. なお密度と厚みと加速度を一定として適当な記号を与えた.

$$\rho a t y_G \frac{XY}{2} = \int_0^Y y \left\{ \rho a t \left(X - \frac{Xy}{Y} \right) \right\} dy \quad (7A-1)$$

この式を $Y \neq 0$ として整理すると $y_G = Y/3$ を得る.

7B.

長さ L の棒の端から3分の1の点を回転中心とする慣性モーメント I_c は, 回転中心を $r=0$ とし, 積

分範囲を $L/3$ から $2L/3$ までとして、式(7B-1)で表せる。

$$I_C = \int_{-\frac{L}{3}}^{\frac{2L}{3}} r^2 dm \quad (7B-1)$$

またこのとき、棒の断面積と密度がそれぞれ S , ρ であるから、

$$dm = \rho S dr \quad (7B-2)$$

式(7B-1) (7B-2)より

$$\begin{aligned} I_C &= \rho S \int_{-\frac{L}{3}}^{\frac{2L}{3}} r^2 dr \\ &= \frac{\rho S L^3}{9} \end{aligned} \quad (7B-3)$$

以上より、与えられた条件による棒の慣性モーメントは $\frac{\rho S L^3}{9}$ である。

配点と解説

問 1

各 3 点

さすがにこれが正解できない人はいないと思いますが、念のための確認です。

問 2

式(2-1)の記述：2.5 点

式(2-2)の記述：2.5 点

dy/dx が「 x の変化量に対する y の変化の割合」であることを認識できていることを確認するための設問です。そのため、問題の式(1)(2)に数値を代入してから h を消去する方法は不可とする。

問 3

時間で 2 階微分したものが加速度である旨の記述：3 点

速度の計算ができている：3 点

加速度の計算ができている：3 点

設問に対して適切に回答している：1 点

それぞれの評価項目は、以下の確認事項に対応している。

- ・説明する意識がある
- ・ $dy/dx=(dy/dt)(dt/dx)$ の計算ができる
- ・ $\frac{d}{dx}\{f(x) \cdot g(x)\}$
 $= \left\{ \frac{d}{dx} f(x) \right\} \cdot g(x) + f(x) \cdot \frac{d}{dx} g(x)$ ができる
- ・尋ねられたことに応答している

問 4

20 点

ただし、説明が適切になされていなければ 5 点を原点了。さらに以下の項目で各 2.5 点の減点項目を設けた。

- ・回転数を 1 秒当りに直す
- ・有効数字を妥当な方法で示す
- ・四捨五入を繰り返さない
- ・数値を正しく計算する
- ・出力を kW または W で回答する

問題の意図としては、「単位や次元を適切に取り扱う」「有効数字を適切に示す」ということを確認することである。また有効数字を有効桁数で丸める際に、「 \approx 」を使用した場合も減点対象である。

問 5

20 点

積分が何をしているのか認識できていることを確認する問題である。授業の時から述べているように、適当に計算し易い数式と積分範囲を仮定して計算したら、自身の解答の妥当性が確認ができる。

問 6

配点は、前半を 9mm もしくは 0.9cm と導くことが 12 点、 $80 \times 10 \div 9$ から 89mm を導くことが 8 点である。 \approx に \neq のニュアンスがあることを理解できていない解答は不可とした。

出題の意図は、有効数字の桁数について考えてもらうことである。最も小さい目盛りが 1mm 刻みなのにそれよりも小さな単位で記述する者は許されないし、80mm の 10 倍が 900mm になるのも困ります。

します。また D 評価の学生に再試を実施します。

問 7

20 点

ただし主要な数式を導く過程を適切に説明していない場合は、50%減点した。

出題の意図としては、積分を用いて現象等を適切に表現し、かつ自身の思考を記録に残せることである。

問 7A は思考力を測る問題である。設問に記載の $y_G = Y/3$ を得るためには、底辺が $x=0$ である必要がある。そのため解答中で図もしくは記述によって底辺が $x=0$ であることを示すか、問題の不備を指摘しなければならない。

問 7B では、解答例で $r=0$ を回転中心とする旨の記述があるように、数式における回転中心の扱いに関する説明が必要である。記述でなくても、図で構わない。

なお式 (E7-1) やそれに相当する説明の記述無しに、式 (E7-2)のみ記述されている場合は、減点した。実際の計算で式(E7-2)を使うことに何の問題も無いが、説明は説明と割り切るべきで、考え方を記録し示すことが大事である。計算結果が同じであるなら式 (E7-1) を示すべきである。

$$I_C = \rho S \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} r^2 dr \quad (\text{E7-1})$$

$$I_C = 2\rho S \int_0^{\frac{l}{2}} r^2 dr \quad (\text{E7-2})$$

試験全体を通して、些細な数値の入力ミスが答案だけで明らかになる場合、適切に考え方の記録や説明がなされていたと判断できるため、減点しない場合もある。

シラバスからの変更

授業の成績評価は、期末試験の点数 100%で評価